

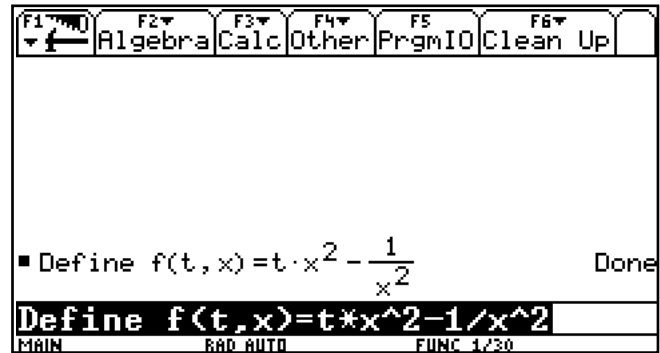
Aufgabe 1

Gegenstand dieser Aufgabe ist die Funktionenschar $f_t : x \mapsto t \cdot x^2 - \frac{1}{x^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

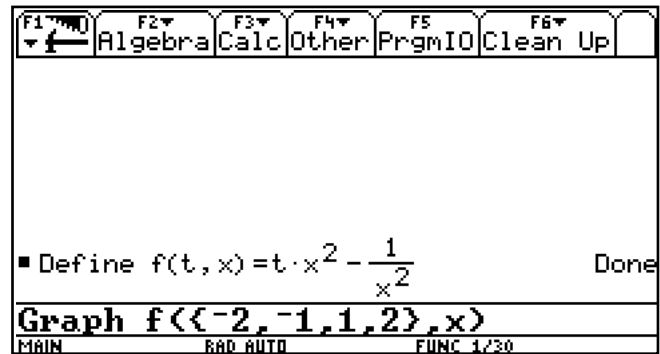
Untersuchen Sie den Verlauf des Schaubilds für mehrere Werte von t und geben Sie zwei Werte an, für die sich ein fundamental unterschiedlicher Kurvenverlauf ergibt. Erläutern Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen sowie die Gleichung der Kurve, auf der alle Hochpunkte der Schar liegen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Kurven?

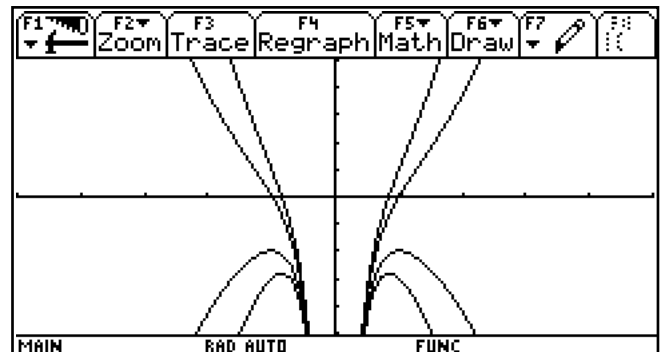
Zunächst definieren wir die Funktionenschar:



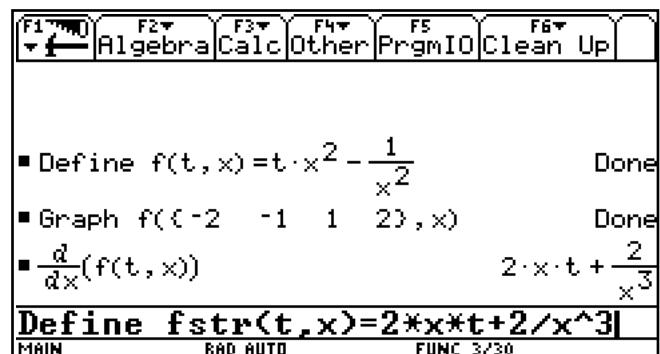
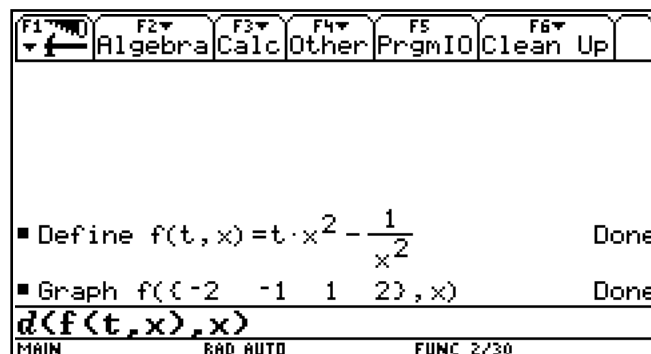
Um eventuelle Unterschiede in den Schaubildern sehen zu können, wählen wir positive und negative Werte für t , z. B. $t \in \{-2; -1; 1; 2\}$ und lassen die Schaubilder zeichnen:



Es ergeben sich tatsächlich grundsätzliche Unterschiede: bei positiven Werten für t gibt es keine Extrempunkte, aber einen Wendepunkt, bei negativen Werten für t gibt es keinen Wendepunkt, wohl aber Extrempunkte, genauer Hochpunkte. In allen Fällen ist das Schaubild aber symmetrisch zur y -Achse.



Wir bestimmen alle Wendepunkte der Schar:



Aufgabe 1

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
Define $f(t, x) = t \cdot x^2 - \frac{1}{x^2}$	Done				
Graph $f((-2 \ -1 \ 1 \ 2), x)$	Done				
$\frac{d}{dx}(f(t, x))$	$2 \cdot x \cdot t + \frac{2}{x^3}$				
Define $fstr(t, x) = 2 \cdot x \cdot t + \frac{2}{x^3}$	Done				
$\frac{d}{dx}(fstr(t, x), x)$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 4/20			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
Graph $f((-2 \ -1 \ 1 \ 2), x)$	Done				
$\frac{d}{dx}(f(t, x))$	$2 \cdot x \cdot t + \frac{2}{x^3}$				
Define $fstr(t, x) = 2 \cdot x \cdot t + \frac{2}{x^3}$	Done				
$\frac{d}{dx}(fstr(t, x))$	$2 \cdot t - \frac{6}{x^4}$				
$\frac{d}{dx}(fstr(t, x), x)$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 5/20			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
Graph $f((-2 \ -1 \ 1 \ 2), x)$	Done				
$\frac{d}{dx}(f(t, x))$	$2 \cdot x \cdot t + \frac{2}{x^3}$				
Define $fstr(t, x) = 2 \cdot x \cdot t + \frac{2}{x^3}$	Done				
$\frac{d}{dx}(fstr(t, x))$	$2 \cdot t - \frac{6}{x^4}$				
Define $f2str(t, x) = 2 \cdot t - \frac{6}{x^4}$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 5/20			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\frac{d}{dx}$	x^3				
Define $fstr(t, x) = 2 \cdot x \cdot t + \frac{2}{x^3}$	Done				
$\frac{d}{dx}(fstr(t, x))$	$2 \cdot t - \frac{6}{x^4}$				
Define $f2str(t, x) = 2 \cdot t - \frac{6}{x^4}$	Done				
solve($f2str(t, x) = 0, x$)					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 6/20			

Wie erwartet gibt es Wendepunkte nur für $t \geq 0$.
Die Wendestellen sind:

$$x_1 = \frac{-\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{t}} \text{ bzw. } x_2 = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{t}}$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\frac{d}{dx}(fstr(t, x))$	$2 \cdot t - \frac{6}{x^4}$				
Define $f2str(t, x) = 2 \cdot t - \frac{6}{x^4}$	Done				
solve($f2str(t, x) = 0, x$)	$x = \frac{-3^{1/4}}{t^{1/4}} \text{ and } \frac{1}{t} \geq 0 \text{ or } x = \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}} \text{ and } \frac{1}{t} \geq 0$				
solve($f2str(t, x) = 0, x$)					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 7/20			

Wegen der Symmetrie müssen wir nur einen Funktionswert ausrechnen und können dann beide Punkte angeben:

$$W_1 \left(\frac{-\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{t}} \mid \frac{2\sqrt[3]{3t}}{3} \right), W_2 \left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{t}} \mid \frac{2\sqrt[3]{3t}}{3} \right)$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
Define $f2str(t, x) = 2 \cdot t - \frac{6}{x^4}$	Done				
solve($f2str(t, x) = 0, x$)	$x = \frac{-3^{1/4}}{t^{1/4}} \text{ and } \frac{1}{t} \geq 0 \text{ or } x = \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}} \text{ and } \frac{1}{t} \geq 0$				
$f \left(t, \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}} \right)$	$\frac{2 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot t}{3}$				
$f(t, 3^{1/4}/t^{1/4})$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 8/20			

Die Kurve, auf der alle Wendepunkte liegen, erhal-

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
Define $f2str(t, x) = 2 \cdot t - \frac{6}{x^4}$	Done				
solve($f2str(t, x) = 0, x$)	$x = \frac{-3^{1/4}}{t^{1/4}} \text{ and } \frac{1}{t} \geq 0 \text{ or } x = \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}} \text{ and } \frac{1}{t} \geq 0$				
$f \left(t, \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}} \right)$	$\frac{2 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot t}{3}$				
solve($x = 3^{1/4}/t^{1/4}, t$)					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 8/20			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$x = \frac{-3^{1/4}}{t^{1/4}} \text{ and } \frac{1}{t} \geq 0 \text{ or } x = \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}} \text{ and } \frac{1}{t} \geq 0$					
$f \left(t, \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}} \right)$	$\frac{2 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot t}{3}$				
solve($x = \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}}, t$)	$t = \frac{3}{x^4} \text{ and } \frac{1}{x} \geq 0$				
solve($x = 3^{1/4}/t^{1/4}, t$)					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 9/20			

Aufgabe 1

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$x = \frac{-3^{1/4}}{t^{1/4}}$ and $\frac{1}{t} \geq 0$ or $x = \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}}$ and $\frac{1}{t} >$					
$f\left(t, \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}}\right) \quad \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot t}{3}$					
$\text{solve}\left(x = \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}}, t\right) \quad t = \frac{3}{x^4}$ and $\frac{1}{x} \geq 0$					
$y = 2 \cdot \sqrt{3 \cdot t} / 3 \quad t = 3/x^4$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 9/20			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$f\left(t, \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}}\right) \quad \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot t}{3}$					
$\text{solve}\left(x = \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}}, t\right) \quad t = \frac{3}{x^4}$ and $\frac{1}{x} \geq 0$					
$y = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot t}{3} \quad t = \frac{3}{x^4} \quad y = \frac{2}{x^2}$					
$y = 2 \cdot \sqrt{3 \cdot t} / 3 \quad t = 3/x^4$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 10/20			

ten wir folgendermaßen:

Die Kurve aller Wendepunkte hat also die Gleichung $y = \frac{2}{x^2}$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$f\left(t, \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}}\right) \quad \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot t}{3}$					
$\text{solve}\left(x = \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}}, t\right) \quad t = \frac{3}{x^4}$ and $\frac{1}{x} \geq 0$					
$y = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot t}{3} \quad t = \frac{3}{x^4} \quad y = \frac{2}{x^2}$					
$\text{solve}(fstr(t, x) = 0, x)$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 10/20			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\text{solve}\left(x = \frac{3^{1/4}}{t^{1/4}}, t\right) \quad t = \frac{3}{x^4}$ and $\frac{1}{x} \geq 0$					
$y = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot t}{3} \quad t = \frac{3}{x^4} \quad y = \frac{2}{x^2}$					
$\text{solve}(fstr(t, x) = 0, x)$					
$x = -\left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}$ and $\frac{1}{t} \leq 0$ or $x = \left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}$					
$f\left(t, \left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}\right)$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 11/20			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\text{solve}(fstr(t, x) = 0, x)$					
$x = -\left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}$ and $\frac{1}{t} \leq 0$ or $x = \left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}$					
$f\left(t, \left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}\right) \quad \sqrt{\frac{-1}{t}} \cdot t - \frac{1}{\sqrt{\frac{-1}{t}}}$					
$f\left(t, \left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}\right)$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 12/20			

Auf demselben Weg bestimmen wir die Gleichung der Kurve aller Hochpunkte:

Die Hochpunkte haben also die folgenden Koordinaten:

$$H_1 \left(-4 \sqrt{\frac{-1}{t}} \mid t \cdot \sqrt{\frac{-1}{t}} - \sqrt{-t} \right)$$

$$H_2 \left(4 \sqrt{\frac{-1}{t}} \mid t \cdot \sqrt{\frac{-1}{t}} - \sqrt{-t} \right)$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\text{solve}(fstr(t, x) = 0, x)$					
$x = -\left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}$ and $\frac{1}{t} \leq 0$ or $x = \left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}$					
$f\left(t, \left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}\right) \quad \sqrt{\frac{-1}{t}} \cdot t - \frac{1}{\sqrt{\frac{-1}{t}}}$					
$\text{solve}\left(x = -\left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}, t\right)$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 12/20			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$x = -\left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}$ and $\frac{1}{t} \leq 0$ or $x = \left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}$					
$f\left(t, \left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}\right) \quad \sqrt{\frac{-1}{t}} \cdot t - \frac{1}{\sqrt{\frac{-1}{t}}}$					
$\text{solve}\left(x = -\left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}, t\right) \quad t = \frac{-1}{x^4}$ and $x \leq 0$					
$\text{solve}\left(x = -\left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}, t\right)$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 13/20			

für $t < 0$.

Aufgabe 1

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
$x = -\left(\frac{1}{t}\right)$ and $\frac{1}{t} \leq 0$ or $x = \left(\frac{1}{t}\right)$					
$f\left(t, \left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}\right)$					
$\sqrt{\frac{-1}{t}} \cdot t - \frac{1}{\sqrt{\frac{-1}{t}}}$					
$\text{solve}\left(x = -\left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}, t\right)$					
$t = \frac{-1}{x^4}$ and $x \leq 0$					
$y = \sqrt{(-1/t)} * t - 1 / (\sqrt{(-1/t)}) t = -1 / ...$					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 13/30	

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
$\left(\frac{-1}{t}\right)$					
$\text{solve}\left(x = -\left(\frac{-1}{t}\right)^{1/4}, t\right)$					
$t = \frac{-1}{x^4}$ and $x \leq 0$					
$y = \sqrt{\frac{-1}{t}} \cdot t - \frac{1}{\sqrt{\frac{-1}{t}}} t = \frac{-1}{x^4}$					
$y = \frac{-2}{x^2}$					
$y = \sqrt{(-1/t)} * t - 1 / (\sqrt{(-1/t)}) t = -1 / ...$					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 14/30	

Die Hochpunkte liegen also alle auf der Kurve mit der Gleichung $y = -\frac{2}{x^2}$.

Die Kurve, die alle Wendepunkte enthält, und die Kurve, die alle Hochpunkte enthält, liegen symmetrisch bezüglich der x-Achse.