Funktionenscharen sind eigentlich Funktionen mit zwei Variablen, von denen wir nur eine als freie Variable betrachten, die andere als Parameter.

Beispiele:

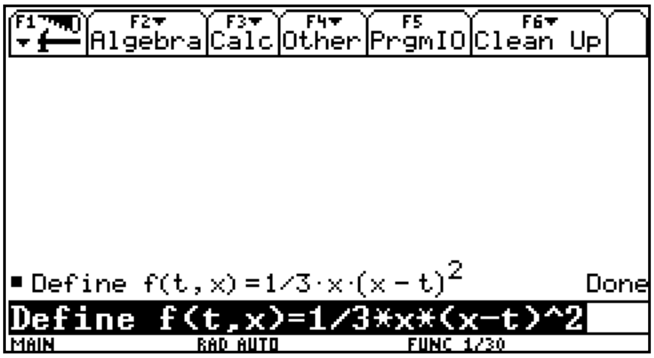
$f_t : x \mapsto \frac{1}{3} x \cdot (x-t)^2$, $t \in \mathbb{R}$ **;** $g_a : x \mapsto \left(\frac{x}{9}\right)^2 \cdot \left(3x^2 - a \cdot x + 3a\right)$, $a \geq 0$;

$h_k : x \mapsto \frac{\sqrt{100-k^2}}{k} \cdot x + \sqrt{100-k^2}$, $k \neq 0$

Wir sehen uns die durch f_t gegebene Schar etwas näher an.

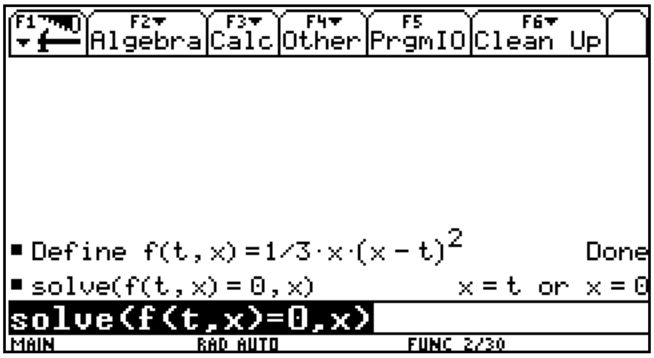
Eingabe

Sie erfolgt wie gewohnt über den Befehl DEFINE. Statt f(x) = ...müssen wir hier allerdings schreiben **f(t,x) = …**



Nullstellen berechnen

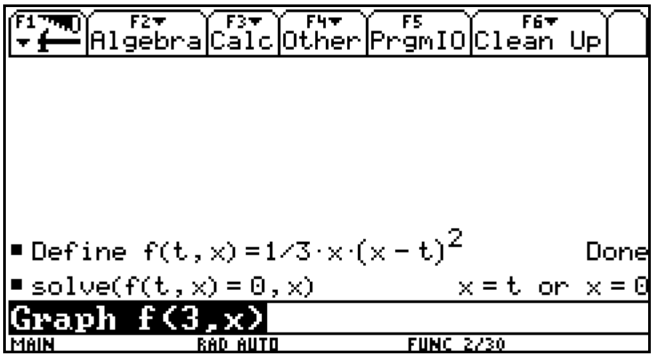
Der SOLVE- Befehl funktioniert auch hier:



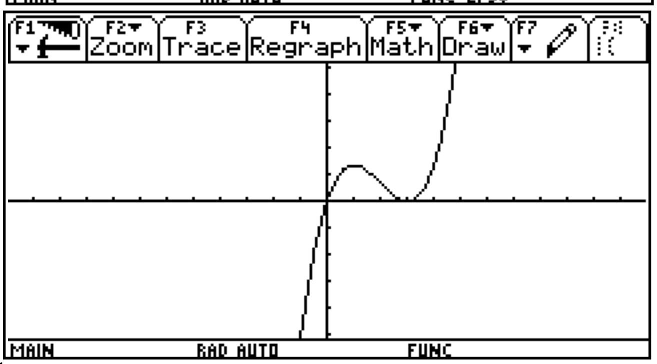
Schaubilder zeichnen

Die Eingabe beim GRAPH-Befehl ist etwas anders als bei „herkömmlichen“ Funktionen:

Anstelle des Parameters geben wir einen festen Wert ein (z. B. 3 wie im Bild) und lassen dann zeichnen.



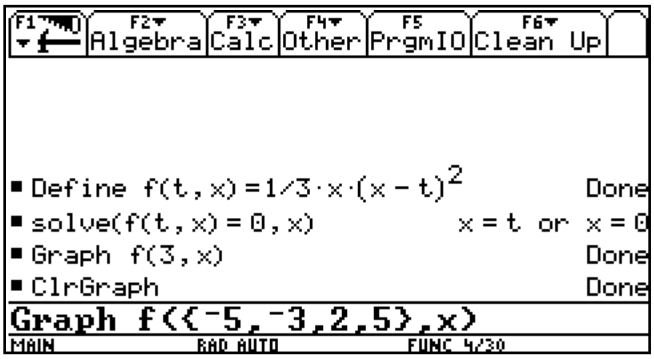
Im Bild ist das Schaubild von f(3,x) dargestellt. In unserer gewohnten Schreibweise ist das das Schaubild von f_3.



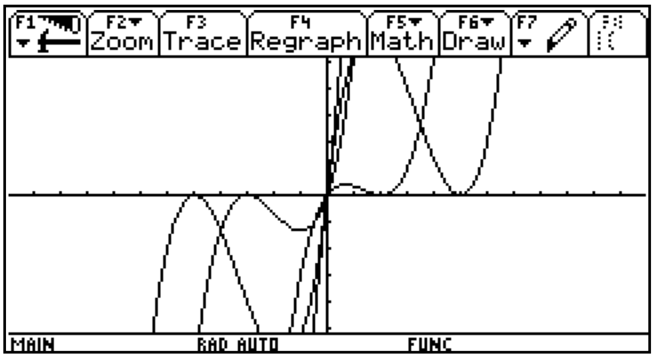
Wir können auch mehrere Exemplare der Schar gleichzeitig darstellen. Dazu müssen wir anstelle des Parameters eine Liste eingeben, die die Werte enthält, die der Parameter annehmen soll. Diese Liste wird durch geschweifte Klammern begrenzt.
Wir zeichnen f_{-1} , f_1 , f_2 und f_5 und geben dafür ein:

GRAPH f({–5, -3, 2, 5},x)

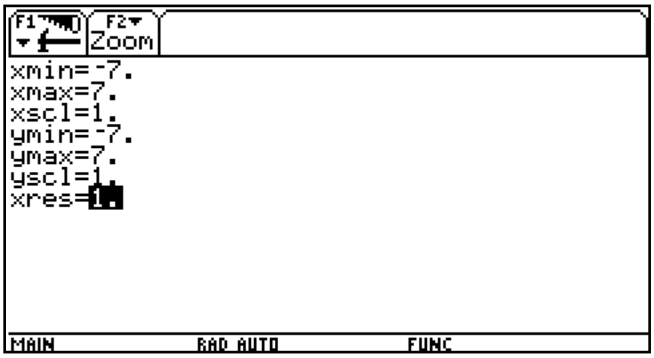
vorher löschen wir jedoch den Graphik-Bildschirm, denn wenn wir dies nicht tun, wird das Schaubild von f_3 ebenfalls mit eingezeichnet.



Das Zeichnen dauert jetzt ein kleines Weilchen. Zeit für einen Kaffee ;-)

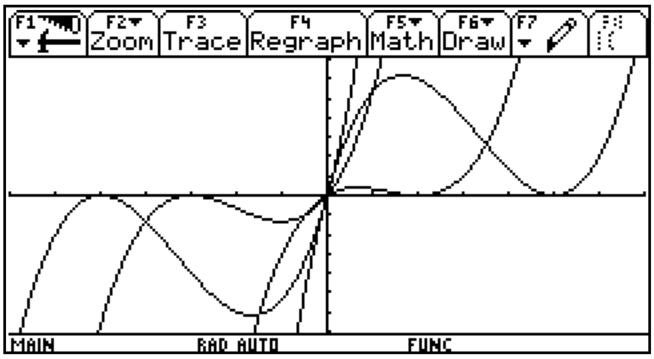


Das Zeichenfenster ist etwas ungeschickt gewählt. Wir ändern es ab.



◊R für GRAPH eingeben
Und wieder etwas Zeit vergehen lassen...

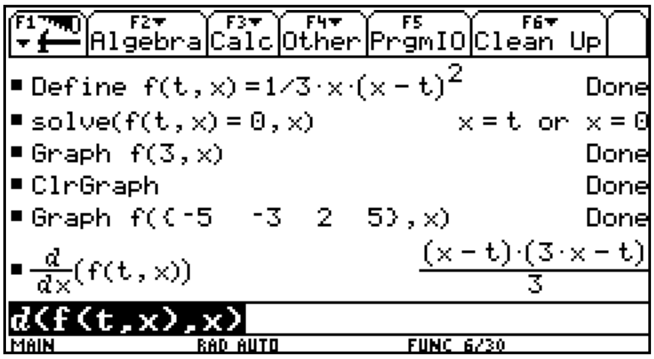
Das Ergebnis ist schon etwas besser.



Kümmern wir uns um die Punkte mit waagrechter Tangente. Dazu müssen wir $f_t(x)$ ableiten.

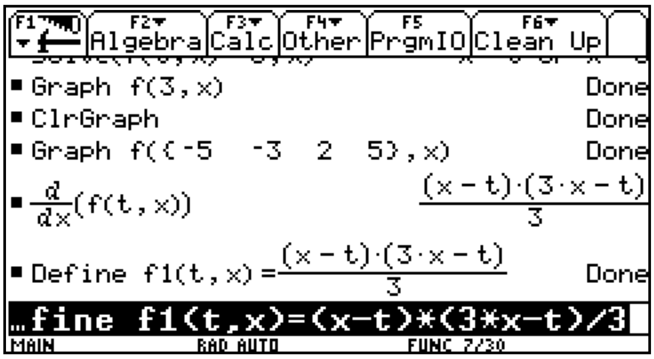
Wir verwenden den Befehl

d(f(t,x),x)



und definieren die Ableitung als Funktion.

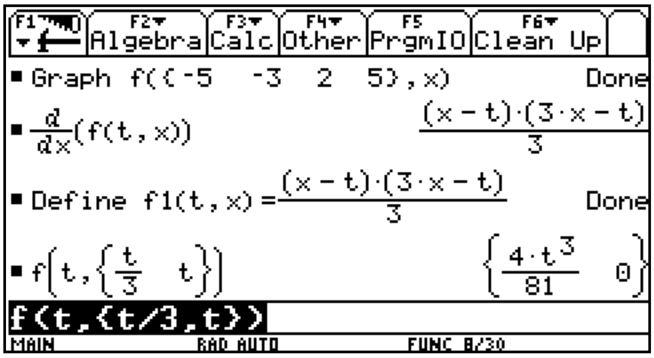
Dazu geben wir zunächst den Befehl DEFINE ein, holen dann den Ableitungsterm aus dem History-Fenster in die Eingabezeile und schließen mit ENTER ab.



Die Extremstellen liegen bei x = t bzw. $x = \frac{t}{3}$ (falls t = 0 ist, gibt es keine Extremstelle. Funktionsterm beachten!). Zur Berechnung der Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente geben wir

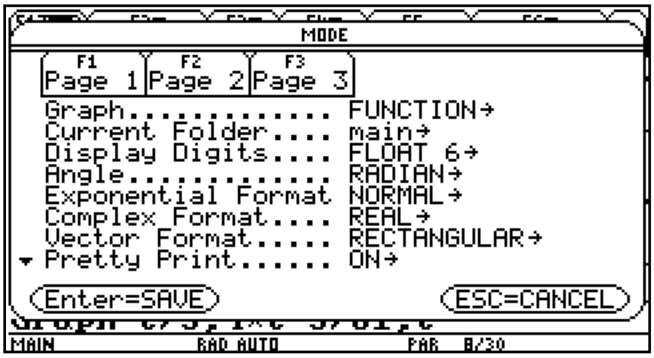
f(t, {t/3,t})

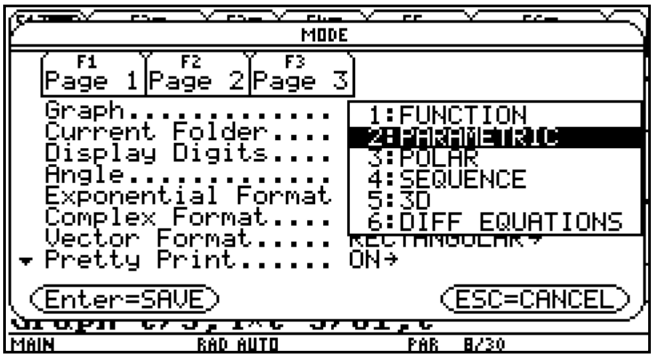
ein und erhalten:

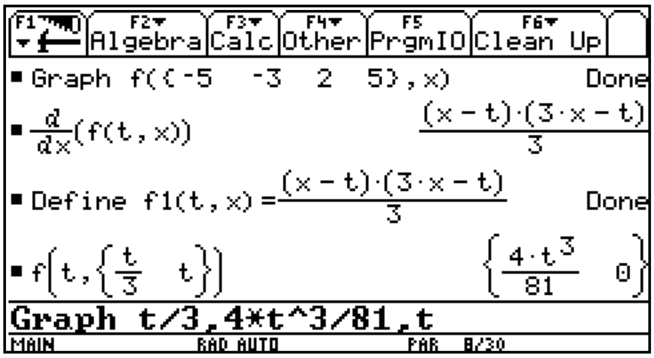


Ein Punkt mit waagrechter Tangente liegt immer auf der x-Achse: (t | 0), der andere hat die Koordinaten $\left(\frac{t}{3} \middle| \frac{4t^3}{81}\right)$.

Wir schauen uns mal an, wie diese Punkte in der Zeichenebene liegen. Dazu drücken wir die Taste MODE und wählen bei Graph den Punkt 2 PARAMETRIC

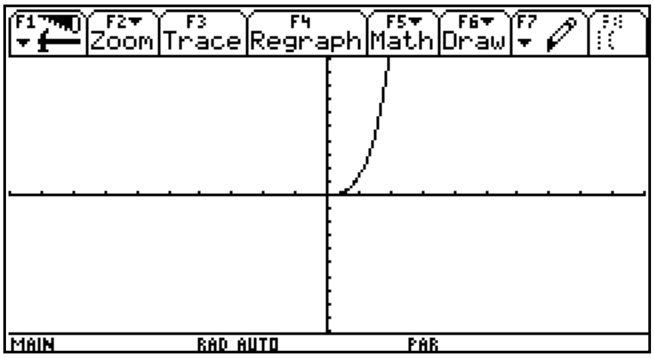






Um die Punkte anzuzeigen, verwenden wir wieder den Befehl GRAPH, der allerdings hier eine etwas andere Syntax bekommt: er wird gefolgt vom x-Wert, dem y-Wert und dem Parameter:

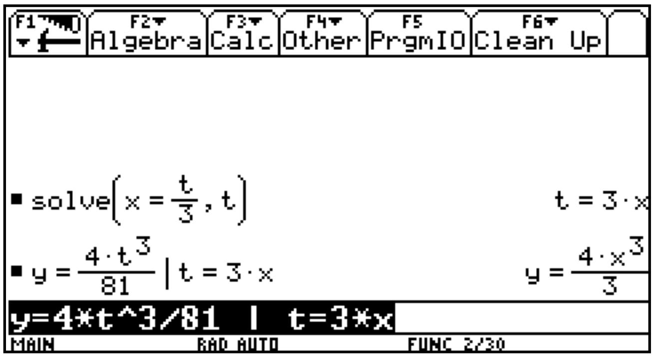
graph t/3, 4t^3/81,t



Offensichtlich werden die Punkte nur für Werte von t ≥ 0 gezeichnet.

Außerdem scheinen Sie eine Kurve zu bilden.

Die drei Buchstaben PAR unterhalb des Graphik-Feldes zeigen, dass es sich bei dem Schaubild um einen sogenannten *Parameterplot* handelt. Die Koordinaten der gezeichneten Punkte hängen von einem Parameter ab.



Gibt es auch eine herkömmliche Darstellung für die gezeichnete Kurve ?

Zunächst stellen wir den Modus wieder auf FUNCTION zurück und begeben uns in den Home-Bildschirm. Dort lösen wir die Gleichung

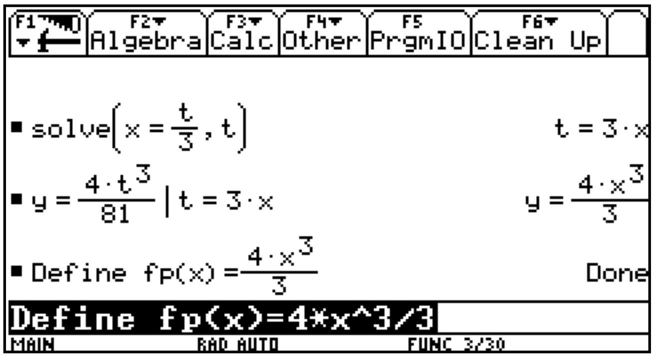
x = x-Wert des Punktes

nach t auf und setzen dann das Ergebnis in die Gleichung

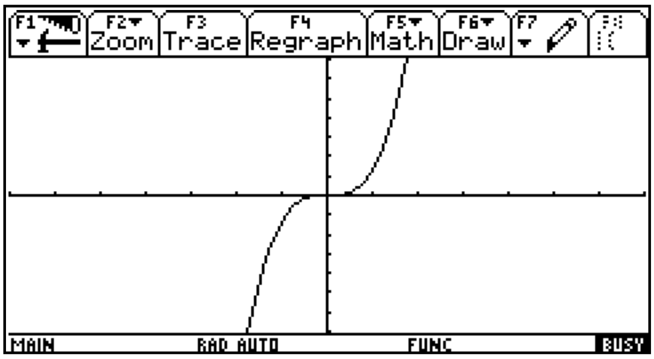
y = y-Wert des Punktes

ein.

Als Ergebnis erhalten wir die Gleichung der Kurve, auf der alle unsere Punkte liegen, in der herkömmlichen Form.



Wir definieren mittels des erhaltenen Terms die Funktion fp wie im Bild



und lassen ihr Schaubild zeichnen.

Untersuchen Sie, auf welcher Kurve alle Wendepunkte der Schar liegen.

(Ergebnis: $y = \frac{x^3}{12}$)