

# eine Musteraufgabe

Wir betrachten die Funktion  $f$  mit  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 6x + 2$ .

- Zeigen Sie, dass das Schaubild von  $f$  symmetrisch zum Punkt  $Z(3|2)$  ist.
- Bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte des Schaubilds von  $f$ .
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in  $P\left(\frac{3}{2} \mid y_P\right)$  an das Schaubild von  $f$ .

Diese Tangente schneidet das Schaubild in einem weiteren Punkt  $S$ . Berechnen Sie dessen Koordinaten.

- Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von  $f$  und bestimmen Sie die Extrempunkte des Schaubilds von  $f$ .
- Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen des Schaubilds im Punkt  $Z$ . In welchen weiteren Punkten schneidet diese Normale das Schaubild?
- Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen in einem beliebigen Punkt  $Q(u|f(u))$ .  
Gibt es Punkte, deren Normale durch den Ursprung verläuft?
- Gibt es weitere Normalen des Schaubilds, die die  $x$ -Achse im selben Punkt schneiden wie die Normale aus e)?

- Wenn das Schaubild von  $f$  symmetrisch zu  $Z(3|2)$  ist, dann müssen wir ein zum Ursprung symmetrisches Schaubild erhalten, wenn wir den Graphen von  $f$  um 3 nach links und um 2 nach unten verschieben.

Die Gleichung des verschobenen Schaubilds erhalten wir als  $y = f_v(x) = f(x + 3) - 2$ .

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up		
Define f(x) = -1/3·x <sup>3</sup> + 3·x <sup>2</sup> - 6·x + 2 Done						Define f(x) = -1/3·x <sup>3</sup> + 3·x <sup>2</sup> - 6·x + 2 Done					
Define f <sub>v</sub> (x) = f(x + 3) - 2 Done						Define f <sub>v</sub> (x) = f(x + 3) - 2 Done					
<b>Define f<sub>v</sub>(x) = f(x + 3) - 2</b>						<b>f<sub>v</sub>(x)</b>					
3·x - x <sup>3</sup> /3						3·x - x <sup>3</sup> /3					
FUNC 2/99						FUNC 3/99					

Der Funktionsterm von  $f_v$  enthält nur noch ungerade  $x$ -Potenzen,  $f_v$  ist also eine ungerade Funktion. Das Schaubild einer ungeraden Funktion ist aber stets punktsymmetrisch zum Ursprung des KoSy.

Daher ist das Schaubild von  $f$  punktsymmetrisch zu  $Z(3|2)$ .

- Achsenschnittpunkte:  $Y(0|2)$  ist Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
Define f(x) = -1/3·x <sup>3</sup> + 3·x <sup>2</sup> - 6·x + 2 Done					
Define f <sub>v</sub> (x) = f(x + 3) - 2 Done					
f <sub>v</sub> (x) 3·x - x <sup>3</sup> /3					
zeros(f(x), x) (.415775 2.29428 6.28995)					
<b>zeros(f(x), x)</b>					
FUNC 4/99					

Die Nullstellen lassen sich nur näherungsweise angeben:

$$x_1 \approx 0,416 ; x_2 \approx 2,294 ; x_3 \approx 6,290$$

Die zugehörigen Achsenschnittpunkte sind  $N_1(0,416|0) ; N_2(2,294|0) ; N_3(6,290|0)$

# eine Musteraufgabe

c) Tangente an das Schaubild in  $P\left(\frac{3}{2} \mid f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ :

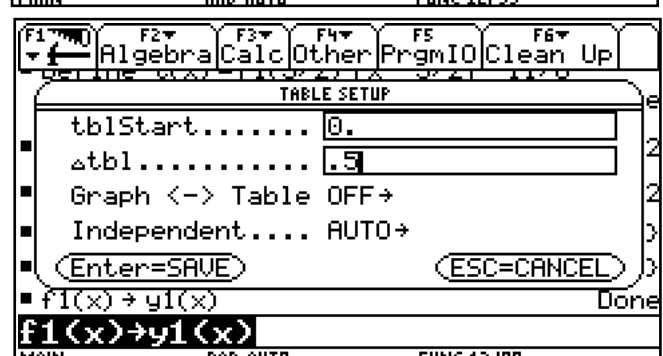
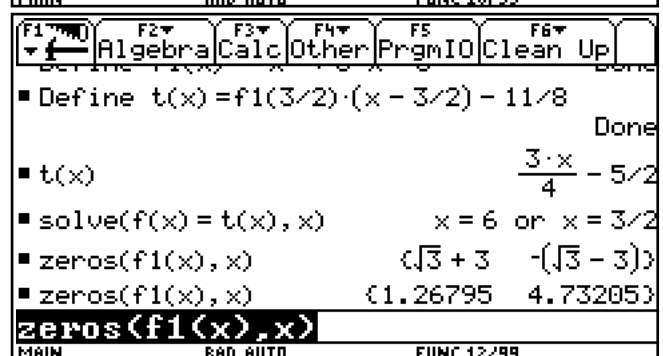
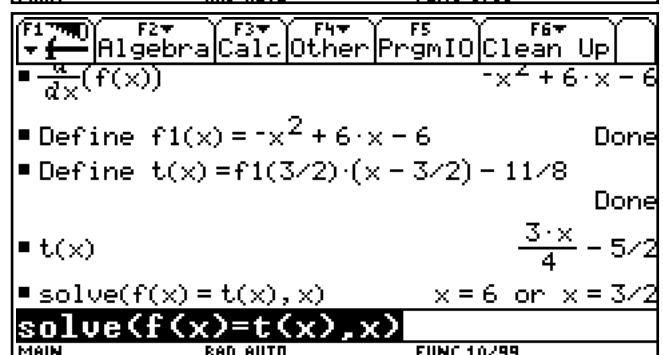
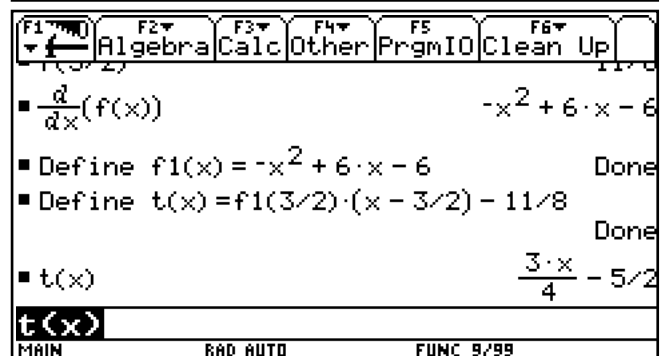
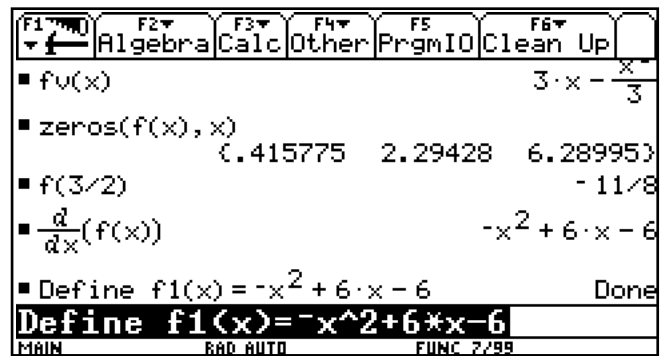
Wir berechnen zunächst  $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{8}$  und berechnen dann  $f'(x)$ .  
Für den TI heißt  $f'(x)$  dann  $f1(x)$ .

Die Gleichung der Tangente in P lautet dann:  
$$t(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{11}{8} = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$$
  
Weil wir Schnittpunkte mit dem Schaubild von  $f$  berechnen müssen, definieren wir  $t$  gleich als neue Funktion.

Wir finden neben dem uns bereits bekannten Punkt P einen weiteren Schnittpunkt:  
 $S(6 \mid t(6)) = S(6 \mid 2)$ .

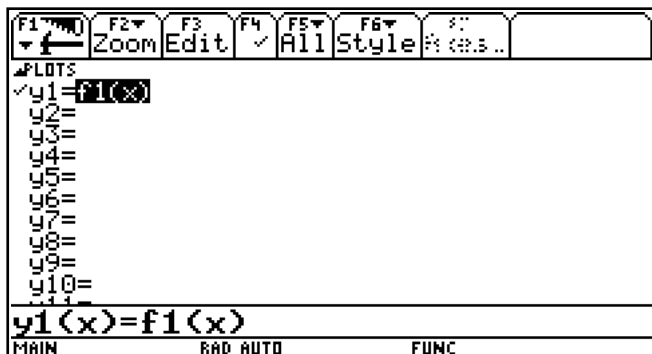
d) Den Nullstellen der Ableitung können wir die Grenzen der Monotoniebereiche entnehmen. Findet ein Vorzeichenwechsel von  $f'$  statt, liegen lokale Extrempunkte bei diesen Nullstellen vor.  
Für die Überprüfung des Vorzeichenwechsels lassen wir uns Näherungswerte angeben.

Für die Überprüfung lassen wir uns eine Wertetabelle von  $f'$  ausgeben.  
Wir setzen die Tabellenparameter so, dass wir einen eventuellen VZW erkennen können.



# eine Musteraufgabe

Wir wechseln in den Y=-Bildschirm und geben  $y_1(x) = f_1(x)$  ein.



Ein Wechsel in den Tabellenmodus zeigt die gewünschte Wertetabelle an, der wir entnehmen, dass  $f'$  an der Stelle  $3 - \sqrt{3} \approx 1,27$  das Vorzeichen von - nach + und an der Stelle  $3 + \sqrt{3}$  das Vorzeichen von + nach - wechselt.

x	y1				
0.	-6.				
.5	-3.25				
1.	-1.				
1.5	.75				
2.	2.				
2.5	2.75				
3.	3.				
3.5	2.75				

$x = 0.$

x	y1				
3.	3.				
3.5	2.75				
4.	2.				
4.5	.75				
5.	-1.				
5.5	-3.25				
6.	-6.				
6.5	-9.25				

$x = 6.5$

■ $t(x)$	$\frac{3 \cdot x}{4} - 5\sqrt{2}$
■ $\text{solve}(f(x) = t(x), x)$	$x = 6$ or $x = 3\sqrt{2}$
■ $\text{zeros}(f_1(x), x)$	$(\sqrt{3} + 3 \quad -(\sqrt{3} - 3))$
■ $\text{zeros}(f_1(x), x)$	$(1.26795 \quad 4.73205)$
■ $f(3 + \sqrt{3})$	$2 \cdot \sqrt{3} + 2$
■ $f(3 - \sqrt{3})$	$2 - 2 \cdot \sqrt{3}$
■ $f(3 - \sqrt{3})$	

$f(3 - \sqrt{3})$

Für  $x \leq 3 - \sqrt{3}$  fällt das Schaubild von  $f$ , für  $3 - \sqrt{3} \leq x \leq 3 + \sqrt{3}$  wächst es und für  $x \geq 3 + \sqrt{3}$  fällt es wieder. Daher gibt es sowohl einen Tiefpunkt  $T(3 - \sqrt{3} | 2 - 2 \cdot \sqrt{3})$  als auch einen Hochpunkt  $H(3 + \sqrt{3} | 2 \cdot \sqrt{3} + 2)$ .

e) Die Gleichung der Normalen in Z lautet:

$$n(x) = \frac{-1}{f'(3)} \cdot (x - 3) + 2 = -\frac{1}{3}x + 3.$$

■ $\text{zeros}(f_1(x), x)$	$(1.26795 \quad 4.73205)$
■ $f(3 + \sqrt{3})$	$2 \cdot \sqrt{3} + 2$
■ $f(3 - \sqrt{3})$	$2 - 2 \cdot \sqrt{3}$
■ Define $n(x) = \frac{-1}{f_1(3)} \cdot (x - 3) + 2$	Done
■ $n(x)$	$3 - \frac{x}{3}$

$n(x)$

# eine Musteraufgabe

Die weiteren Schnittpunkte der Normalen mit dem Schaubild von f sind:

$$S_1 \left( 3 - \sqrt{10} \mid \frac{\sqrt{10}}{3} + 2 \right) \quad \text{und}$$

$$S_2 \left( 3 + \sqrt{10} \mid 2 - \frac{\sqrt{10}}{3} \right).$$

f) Die gesuchte Normalenschar hat die Gleichung

$$n(u, x) = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u) =$$

$$= \frac{(x - u)}{u^2 - 6u + 6} + 3u^2 - 6u + 2$$

Ziemlich unhandlich...

Wir bestimmen die Lösungen der Gleichung  $n(u, 0) = 0$  mithilfe des zeros-Befehls und berechnen anschließend gleich die Koordinaten der zugehörigen Punkte.

$$P_1(0,4 \mid 0,1), P_2(5,0 \mid 5,35), P_3(6,17 \mid 0,87)$$

g) Die Normale aus e) schneidet die x-Achse in  $(9 \mid 0)$  (Kopfrechnen...). Gibt es andere Normalen, die durch  $(9 \mid 0)$  gehen?

Wieder müssen wir eine Weile auf die Antwort warten, wieder erhalten wir drei Punkte:

Den bekannten Punkt Z sowie die Punkte

Die Normalen in den Punkten  
Z,  $P_4(4,5 \mid 5,35)$  und  $P_5(6,33 \mid -0,33)$   
gehen durch  $(9 \mid 0)$ .

```

┌──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┐
│ F1  F2  F3  F4  F5  F6  │
│ ── Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ n(x) 3 - √10/3 │
│ solve(n(x) = f(x), x) │
│ x = -(√10 - 3) or x = √10 + 3 or x = 3 │
│ n(3 - √10) √10/3 + 2 │
│ n(3 + √10) 2 - √10/3 │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ n(3+√(10)) │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ MAIN RAD AUTO FUNC 18/99

```

```

┌──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┐
│ F1  F2  F3  F4  F5  F6  │
│ ── Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ n(3 + √10) 2 - √10/3 │
│ Define n(u, x) = -1/f1(u) * (x - u) + f(u) │
│ Done │
│ n(u, x) │
│ -(u - x) - u^3/3 + 3 * u^2 - 6 * u + 2 │
│ u^2 - 6 * u + 6 │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ n(u, x) │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ MAIN RAD AUTO FUNC 21/99

```

```

┌──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┐
│ F1  F2  F3  F4  F5  F6  │
│ ── Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ Done │
│ n(u, x) │
│ -(u - x) - u^3/3 + 3 * u^2 - 6 * u + 2 │
│ u^2 - 6 * u + 6 │
│ zeros(n(u, 0), u) │
│ (.38863 4.98277 6.17255) │
│ f(.38862975915737 4.9827664062217 │
│ (.101755 5.34997 .873671) │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ ... 7664062217, 6.1725493765353) │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ MAIN RAD AUTO FUNC 23/99

```









```

┌──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┐
│ F1  F2  F3  F4  F5  F6  │
│ ── Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ zeros(n(u, 0), u) │
│ (.38863 4.98277 6.17255) │
│ f(.38862975915737 4.9827664062217 │
│ (.101755 5.34997 .873671) │
│ zeros(n(u, 9), u) │
│ (3 4.46715 6.33134) │
│ f((3 4.4671546240941 6.331343359883) │
│ (2 5.34876 -.329551) │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ ... 1546240941, 6.3313433598832) │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┤
│ MAIN RAD AUTO FUNC 25/99

```

# eine Musteraufgabe

## Befehls glossar

Bildschirm	Vorgang	Tastenfolge
HOME	Funktion definieren	 1     Define $f(x) =$
HOME	Nullstellen berechnen	 4     zeros( $f(x),x$ )
HOME	Funktion ableiten	 1     differentiate( $f(x),x$ )
HOME	Gleichung lösen	 1     solve( <i>Gleichung</i> , <i>Variable</i> )
HOME	Tabellenparameter festlegen	 T     TblSet
	In den $Y=$ -Bildschirm wechseln	 W $Y =$
	Zur Tabellendarstellung wechseln	 Y     TABLE
HOME	Funktionswert an einer <i>Stelle</i> berechnen	$f( Stelle )$ 

# eine Musteraufgabe

## Heftaufschrieb zu dieser Aufgabe:

- a) Verschiebung um 3 nach links und 2 nach unten durchführen. Die neue Funktion hat die Gleichung  $f_v(x) = f(x + 3) - 2 = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$ .

Das zugehörige Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da  $f_v$  eine ungerade Funktion ist (ganzrational und nur ungerade  $x$ -Potenzen).

Also ist das Schaubild von  $f$  punktsymmetrisch zu  $Z(3|2)$ .

- b) Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:  $Y(0|2)$

Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse:  $N_1(0,416|0)$ ;  $N_2(2,294|0)$ ;  $N_3(6,290|0)$

- c) Gleichung der Tangente in  $P$ :

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{8}; \text{ Punkt-Steigungsform der Tangentengleichung: } y = f'\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Tangentengleichung. } t(x) = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$$

Schnittpunkte mit dem Schaubild von  $f$ :  $f(x) = t(x)$

$$x = \frac{3}{2} \vee x = 6; \text{ zweiter Schnittpunkt: } S(6|2)$$

- d) Monotoniebereiche:

$x \leq 3 - \sqrt{3}$  : fallend ;  $3 - \sqrt{3} \leq x \leq 3 + \sqrt{3}$  : wachsend ;  $x \geq 3 + \sqrt{3}$  : fallend

Also: TiP  $T\left(3 - \sqrt{3} \mid 2 - 2 \cdot \sqrt{3}\right)$  und HoP  $H\left(3 + \sqrt{3} \mid 2 \cdot \sqrt{3} + 2\right)$

- e) Normale in  $Z(3|2)$ :  $n(x) = \frac{-1}{f'(3)} \cdot (x - 3) + 2 = -\frac{1}{3}x + 3$

Weitere Schnittpunkte mit dem Schaubild von  $f$ :  $f(x) = n(x)$ .

Gefundene Punkte:

$$S_1\left(3 - \sqrt{10} \mid \frac{\sqrt{10}}{3} + 2\right) \text{ und } S_2\left(3 + \sqrt{10} \mid 2 - \frac{\sqrt{10}}{3}\right).$$

- f) Normale in beliebigem Kurvenpunkt  $Q(u|f(u))$ :

$$n_o(x) = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u) = \frac{(x - u)}{u^2 - 6u + 6} + 3u^2 - 6u + 2$$

Sie geht durch den Ursprung, wenn  $n_o(0) = 0$  ist.

Diese Gleichung muss nach  $u$  aufgelöst werden.

Gefundene Kurvenpunkte:  $P_1(0,4|0,1)$ ,  $P_2(5,0|5,35)$ ,  $P_3(6,17|0,87)$

- g) Schnitt von  $n$  mit der  $x$ -Achse:  $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9$

Die Gleichung  $n_o(9) = 0$  muss nach  $u$  aufgelöst werden.

Gefundene Kurvenpunkte außer  $Z$ :

$$P_4(4,5|5,35) \text{ und } P_5(6,33|-0,33)$$

Die Normalen in diesen Punkten gehen ebenfalls durch  $(9|0)$ .