

Übungen zur Integralrechnung

Klasse 12

① Berechnen Sie:

a) $\int_0^1 (4x + 2)^3 dx$

b) $\int_1^0 \frac{1}{(5x + 4)^2} dx$

c) $\int_{-3}^0 \sqrt{1 - x^3} dx$

d) $\int_{3\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{x} dx$

e) $\int_{-3}^{\sqrt{9}} \left(\sin(x) - \frac{x}{x^2 + 1} + x^3 \right) dx$

f) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx$

g) $\int_3^9 \left(\frac{1}{x} + x^2 - \sqrt{x} \right) dx - \int_6^9 \frac{1}{x} dx + \int_6^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$

h) $\int_{-3}^{-1} \frac{4}{\sqrt{x}} dx$

② Berechnen Sie aus den folgenden Gleichungen jeweils k:

a) $\int_k^{k+1} (kx + k) dx = 7$

b) $\int_{-k}^{\sqrt{k}} (k \cdot x \cdot \sqrt{k - x}) dx = 0$

c) $\int_{k-1}^k (2x + k^2) dx = \frac{3}{10}$

③ Das Schaubild von $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = b$, $b > 0$, begrenzen eine Fläche mit dem Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}$ FE vollständig.
Berechnen Sie den Wert von b.

④ Das Schaubild von $f : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{x}$, $x \geq 0$, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 4$ begrenzen eine Fläche im 1. Feld vollständig. Diese Fläche wird durch die Gerade $x = c$ halbiert.
Berechnen Sie den Wert von c.

⑤ Das Schaubild von $f : x \mapsto \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$, $x \geq 0$, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 4$ begrenzen eine Fläche im 1. Feld vollständig. Diese Fläche wird durch die Gerade $y = m \cdot x$ halbiert.
Berechnen Sie den Wert von m.

⑥ Das Schaubild von $f : x \mapsto \sqrt{4x}$ wird an der Geraden mit der Gleichung $y = x$ gespiegelt. Wie groß ist die Fläche, die von Original und Bild eingeschlossen wird?

⑦ Leiten Sie die Formel für das Volumen eines geraden Kreiskegels mit der Höhe h und dem Radius r durch eine geeignete Integration her.

⑧ Leiten Sie die Formel für das Volumen einer Kugel mit dem Radius r mithilfe der Integralrechnung her.

Übungen zur Integralrechnung

Klasse 12

- ⑨ $f_1: x \mapsto \sqrt{x \cdot (x^2 - 9)}$ und $f_2: x \mapsto -\sqrt{x \cdot (x^2 - 9)}$
- Skizzieren Sie die Schaubilder der Funktionen f_1 und f_2 und geben Sie deren Definitionsmengen sowie die Nullstellen an.
 - Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte und der Wendepunkte. Bestimmen Sie auch die Gleichung(en) der Wendetangente(n).
 - Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation des geschlossenen Kurvenstücks um die x -Achse entsteht.
 - Führen Sie dieselben Untersuchungen für die Funktionen $f_3: x \mapsto \frac{1}{3} \sqrt{x \cdot (3-x)^2}$ und $f_4: x \mapsto -\frac{1}{3} \sqrt{x \cdot (3-x)^2}$ durch.
- ⑩ Die Steigung einer Funktion f ist in jedem Punkt des Schaubilds durch $m = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ gegeben. Die von den positiven Koordinatenachsen, der Kurve und der Geraden $x = 2$ eingeschlossene Fläche hat den Inhalt $A = 4$ FE.
- Wie lautet der Funktionsterm von f ?
 - Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Nullstellen und Extrema und fertigen Sie eine Skizze an.
- ⑪ Gegeben ist für $t > 0$ die Funktionenschar $f(t,x) = \sqrt{2tx + t^2 - 1}$ und die Geradenschar $g(t,x) = t \cdot x$.
- Ermitteln Sie die Definitionsmenge der $f(t,x)$.
 - Ermitteln Sie die Abszissen (x -Werte) der gemeinsamen Punkt der Schaubilder von $f(t,x)$ und $g(t,x)$.
Untersuchen Sie, für welche Werte von t genau 1 gemeinsamer Punkt existiert. Für welche Werte von t existieren genau zwei gemeinsame Punkte?
 - Prüfen Sie, ob es einen Wert von t gibt, für den die Gerade $g(t,x)$ Tangente an das Schaubild von $f(t,x)$ ist.
 - Erarbeiten Sie eine Vorstellung über die Funktionen der Schar $f(t,x)$ und der Geraden $g(t,x)$. Stellen Sie dazu einige Schaubilder zu selbst gewählten Werten für den Parameter t dar.
 - Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Schaubilder für $t = 0,5$ einschließen.
 - Beschaffen Sie sich eine Formel für die Berechnung der Bogenlänge einer Funktion und ermitteln Sie die Länge des Umfangs der in e) berechneten Fläche.
 - Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation der oben genannten Fläche um die x -Achse entsteht.
- ⑫ Gegeben sind die Funktionen f_n durch $f_n(x) = x^n$ und g_n durch $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$. Ihre Schaubilder begrenzen im 1. Feld eine Fläche mit dem Inhalt A_n vollständig.
Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ und interpretieren Sie das Ergebnis graphisch.