Lösung zur Aufgabe ③

Für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktion $f_t: x \mapsto \frac{x}{t} \cdot \sqrt{t^2 - x}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f_t und führen Sie eine Kurvendiskussion durch.
Skizzieren Sie f_3 für $-3 \le x \le 9$.

<u>Untersuchungen ohne Ableitungen:</u>

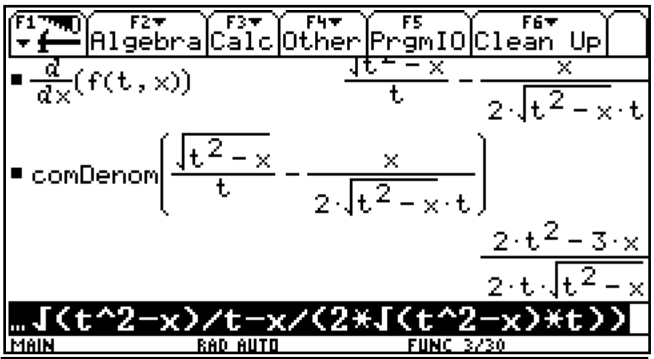
maximale Definitionsmenge: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le t^2\}$.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $O(0|0)$; $N(t^2|0)$

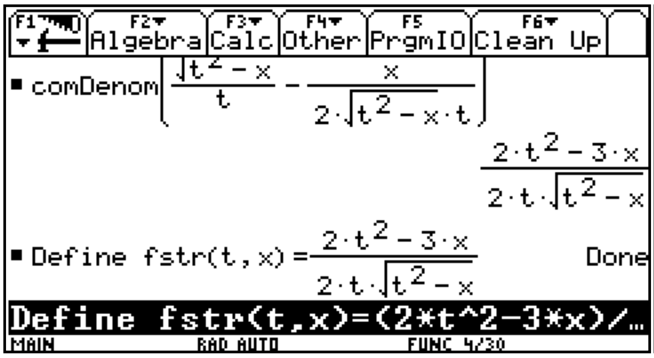
Verhalten für $x \to -\infty$: $f_t(x) \to -\infty$

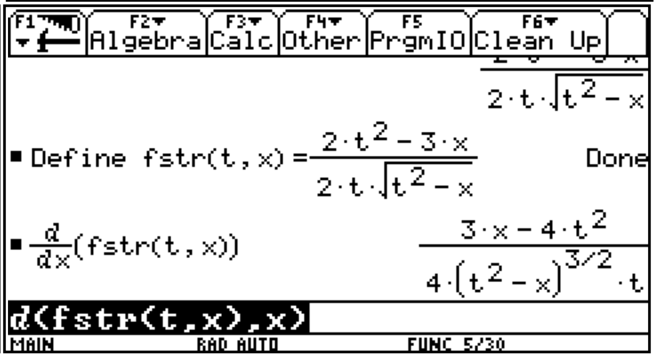
<u>Untersuchungen mit Ableitungen:</u>

Das Ergebnis des Rechners kann mithilfe des Befehls **comDenom(...)** noch umgeformt werden:

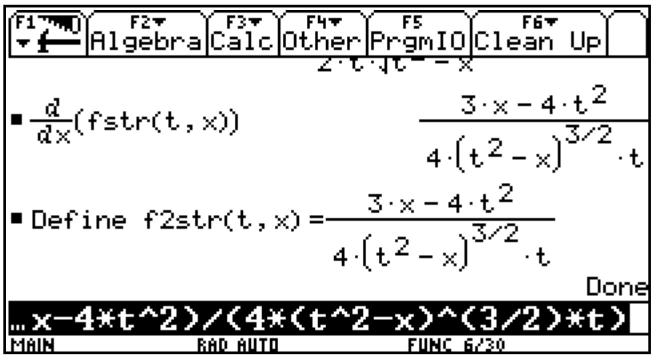


Anschließend wird die Ableitung als Funktion abgespeichert.





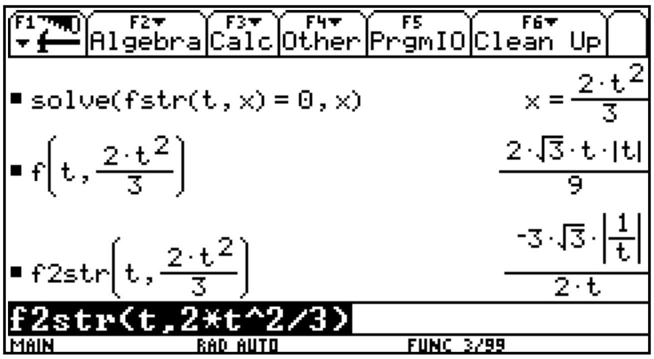
Auch die zweite Ableitung speichern wir als Funktion ab.



Punkte mit waagrechten Tangenten:

$f_t'(x) = 0$: $x = \frac{2}{3}t^2$

zugehöriger Punkt: $E\left(\frac{2}{3}t^2 \middle| \frac{2}{9}t^2 \cdot \sqrt{3}\right)$



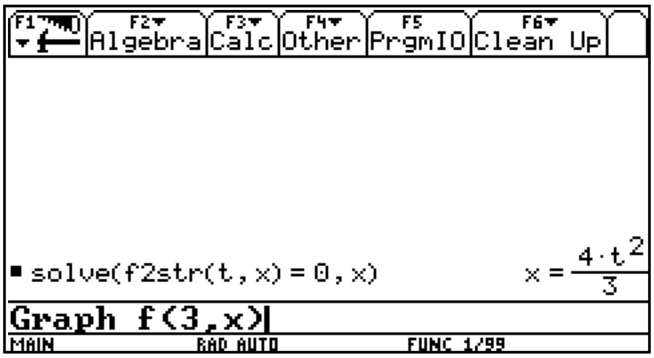
E ist **Hochpunkt**, da die 2. Ableitung für seinen x-Wert negativ ist.

Lösung zur Aufgabe ③

Die Nullstelle der zweiten Ableitung liegt außerhalb der Definitionsmenge von f_t:

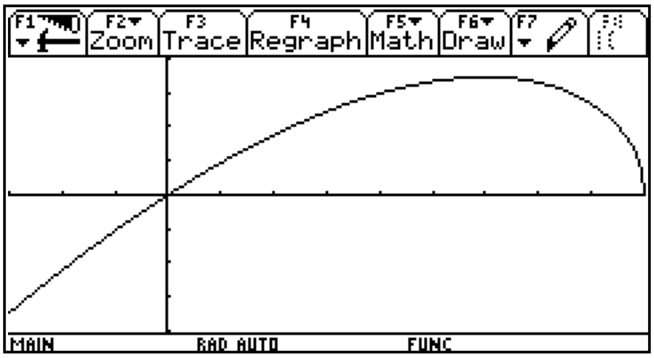
$\frac{4}{3}t^2 > t^2$

Daher gibt es keinen Wendepunkt.



Das Schaubild für $t = 3$:

Befehl: **GRAPH f(3,x)**



b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der alle Extrempunkte der f_t liegen.

$x = \frac{2}{3}t^2$, also $t^2 = \frac{3}{2}x$

$y = \frac{2}{9}t^2 \cdot \sqrt{3}$. Einsetzen des Ergebnisses von oben führt auf: $y = \frac{1}{3}x \cdot \sqrt{3}$

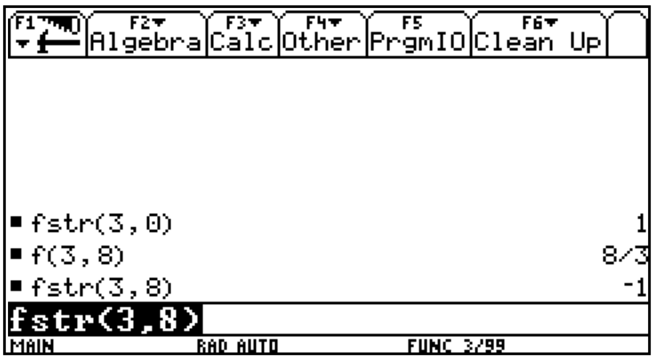
Dies ist die Gleichung der Kurve aller Extrempunkte.

c) Stellen Sie eine Gleichung für die Tangente g_1 an das Schaubild von f_3 im Ursprung sowie für die Tangente im Kurvenpunkt mit dem Rechtswert x = 8 auf.
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels dieser beiden Tangenten.

Die Steigung der Tangente im Ursprung ist $m_1 = 1$. Ihre Gleichung ist also: $y = x$

Die Steigung der Tangente im Kurvenpunkt $P(8 \mid \frac{8}{3})$ ist $m_2 = -1$.

Die Tangenten sind orthogonal, da das Produkt ihrer Steigungen den Wert –1 hat.



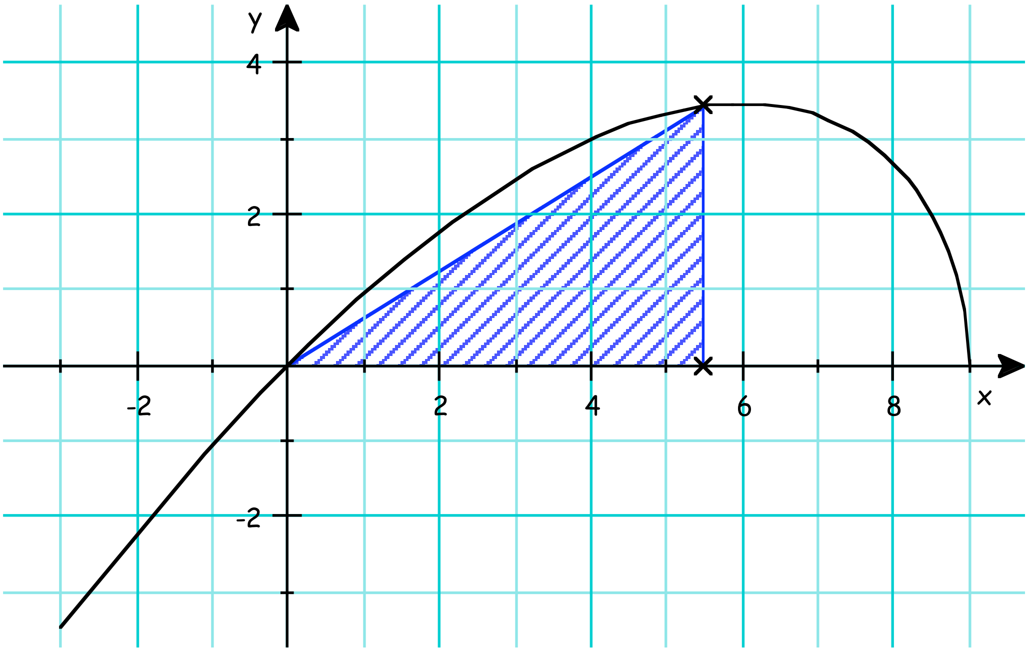
Lösung zur Aufgabe ③

d) Der Koordinatenursprung, der Punkt $A(a|0)$ mit $0 < a < 9$ und der Punkt $B(a|f_3(a))$ bestimmen ein Dreieck, das bei Rotation um die x-Achse einen geraden Kreiskegel erzeugt.
Bestimmen Sie den Wert von a, für den dieser Kreiskegel ein möglichst großes Volumen besitzt und berechnen Sie dieses maximale Volumen.

$A(a|0)$; $B\left(a \,\middle|\, \frac{a\cdot\sqrt{9-a}}{3}\right)$

Der y-Wert von B ist der Radius des Grundkreises des Kegels, der x-Wert ist die Höhe des Kegels. Volumen des Kegels:

$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$



Wir erhalten damit: $V(a) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{a^2\cdot(9-a)}{9}\cdot a = \frac{1}{27}\cdot\pi\cdot\left(9a^3 - a^4\right)$

Da konstante Faktoren beim Ableiten einfach erhalten bleiben, können wir als zu untersuchende Funktion die folgende wählen: $d(a) = 9a^2 - a^3$. Diese Funktion bearbeiten wir „von Hand“.

$d(a) = 9a^3 - a^4$

$d'(a) = 27a - 4a^3$

$d'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 6{,}25$

Wegen $0 < a < 9$ kommt nur $a = 6{,}25$ als Lösung in Frage.

$d''(a) = 27 - 12a$; $d''(6{,}25) = 27 - 75 < 0$, also hat d bei $a = 6{,}25$ ein lokales Maximum.

für $a \to 0$ und $a \to 9$ gilt jeweils: $d(a) \to 0$. Also ist bei $a = 6{,}25$ ein absolutes Maximum.

V hat sein maximum also auch für $a = 6{,}25$.

Es ist $V(6{,}25) = \frac{6561}{256}\pi$.

d) Bei genau einer der Funktionen f_t verläuft die Tangente an das Schaubild von f_t im Punkt $T(3t|f_t(3t))$ parallel zur Geraden

h: $y = -\frac{1}{4}x - 2$.

Bestimmen Sie für diesen Fall den Wert von t.

Es ist $t = 4$ und der Punkt $T(12|6)$.