

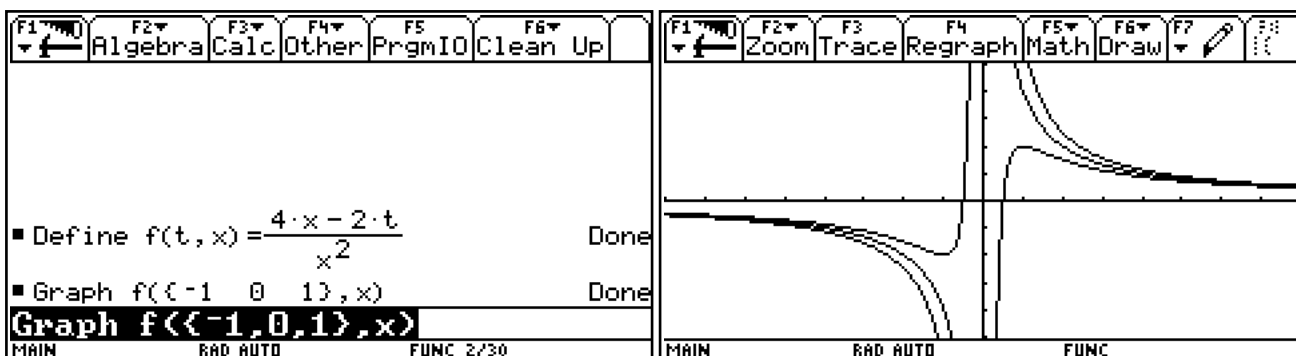
Lösungsvorschlag zu Aufgabe ⑤:

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktionenschar $f(t,x)$ gegeben durch $f(t,x) = \frac{4x - 2t}{x^2}$, $x \neq 0$.

a) Untersuchen Sie, für welche Werte von t sich grundsätzlich verschiedene Kurvenverläufe ergeben. Welche Vermutung drängt sich auf?

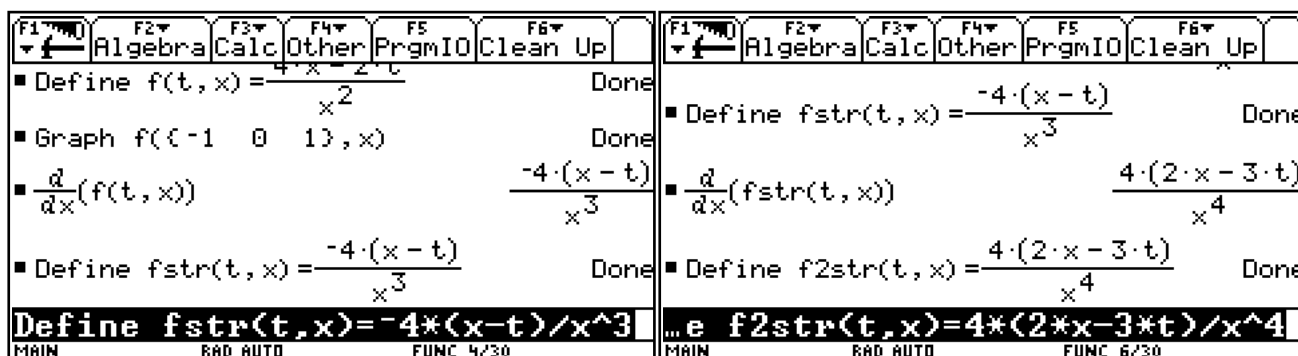
Beschreiben Sie die Unterschiede und begründen Sie ihre Erkenntnisse durch eine Rechnung.

Wir definieren die Funktionenschar und lassen uns die Schaubilder für einige Werte von t zeichnen. Für $t = 0$ erhalten wir $f(0,x) = \frac{4}{x}$ mit einer Hyperbel als Schaubild. Vermutlich wird diese Hyperbel die unterschiedlichen Graphentypen trennen. Wir lassen uns diese Vermutung bestätigen:



Es sieht so aus, als hätten die Schaubilder für $t \neq 0$ einen Extrempunkt, und zwar für $t < 0$ einen TiP und für $t > 0$ einen HoP. Außerdem drängt sich die Vermutung auf, dass die Schaubilder zu $f(t,x)$ und $f(-t,x)$ durch eine Spiegelung am Ursprung des KoSy aufeinander abgebildet werden können.

Rechnerischer Nachweis für $t \neq 0$:



1. Extrempunkte:

Wir bestimmen die ersten beiden Ableitungen und die Extrempunkte.

$f_{str}(t,x) = 0 \Leftrightarrow x = t$; $f_{2str}(t,t) = -\frac{4}{t^3}$. Für $t < 0$ ist $f_{2str}(t,t) > 0$, also liegt hier ein TiP vor, für $t > 0$ ist $f_{2str}(t,t) < 0$, also liegt hier ein HoP vor.

Es ist $f(t,t) = \frac{2}{t}$, also haben wir:

$t > 0$: HoP($t | \frac{2}{t}$), $t < 0$: TiP($t | \frac{2}{t}$)

2. Spiegelung am Ursprung: ersetze x durch $-x$ und prüfe, ob $f(-t, -x) = -f(t, x)$ ist:

$$f(t, x) = \frac{4x - 2t}{x^2}; f(-t, -x) = \frac{-4x + 2t}{x^2} = -f(t, x).$$

Spiegelt man das Schaubild von $f(t, x)$ am Ursprung, so erhält man das Schaubild von $f(-t, x)$.

b) Stellen Sie eine Gleichung der Wendetangente g des Schaubilds von $f(t, x)$ auf.

Die Wendetangente und die Koordinatenachsen bestimmen ein Dreieck, das bei Rotation um die x -Achse einen Kegel mit dem Volumen V_x und bei Rotation um die y -Achse einen Kegel mit dem Volumen V_y erzeugt.

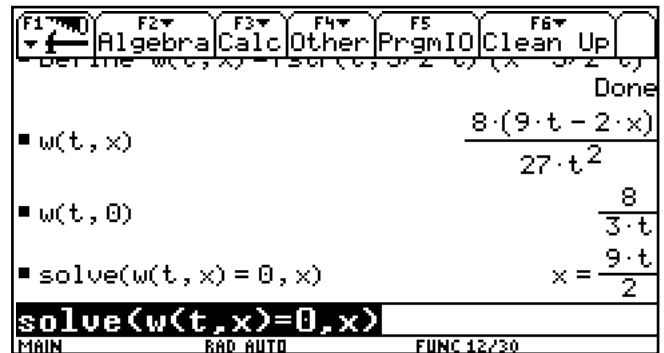
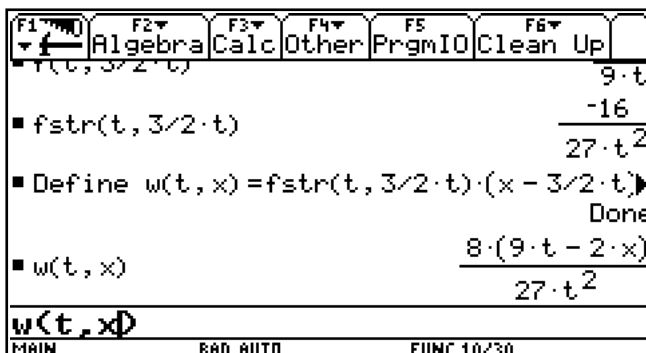
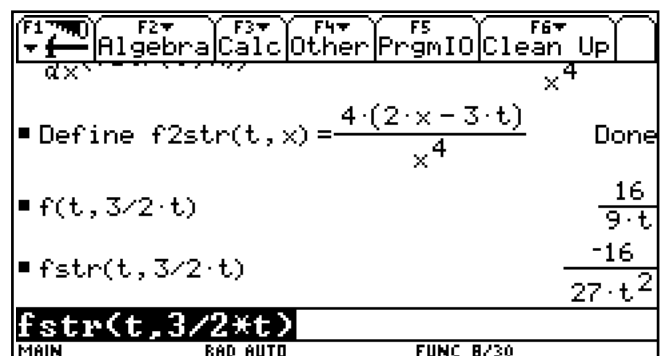
Bestimmen Sie t so, dass beide Kegel das gleiche Volumen haben.

Wir haben oben schon $f_{2str}(t, x) = \frac{4(2x - 3t)}{x^4}$.

$f_{2str}(t, x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}t$. Offensichtlich wechselt $f_{2str}(t, x)$ bei diesem x -Wert das Vorzeichen, sodass der Punkt $W(\frac{3}{2}t | \frac{16}{9t})$ ein WeP ist.

Wendetangente:

$$y = \frac{-16}{27t^2} \cdot (x - \frac{3}{2}t) + \frac{16}{9t} = \frac{-16}{27t^2}x + \frac{8}{3t}.$$



Achsenschnittpunkte:

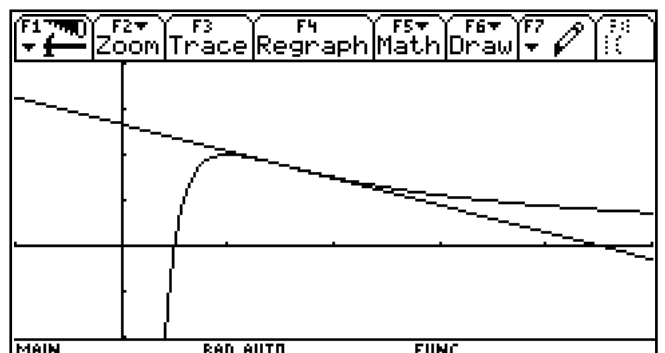
y -Achse: $Y(0 | \frac{8}{3t})$; x -Achse $N(\frac{9t}{2} | 0)$

Das Schaubild für $t = 1$ verdeutlicht uns die Situation.

Wegen der Symmetrieeigenschaft der Schaubilder genügt es, die Situation für $t > 0$ zu untersuchen.

Rotation um die x -Achse: $r = \frac{8}{3t}, h = \frac{9t}{2}$

$$V_x = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{8}{3t}\right)^2 \cdot \frac{9t}{2} = \frac{32}{3t} \cdot \pi$$



$$V_y = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{9t}{2}\right)^2 \cdot \frac{8}{3t} = 18t \cdot \pi$$

$$\text{Volumengleichheit: } 18t \cdot \pi = \frac{32}{3t} \cdot \pi \Leftrightarrow 54t^2 = 32 \Leftrightarrow t^2 = \frac{16}{27} \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \quad (t > 0!)$$

Wegen der Symmetrie entstehen aber auch für $t = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$ gleichgroße Volumina.

- c) Auf der Wendetangente $g(t,x)$ existiert ein Punkt $T(x_T | g(t, x_T))$ mit $0 < x_T < \frac{9}{2}t$ so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks, das von den Parallelen durch T zu den Koordinatenachsen bestimmt wird, maximal ist.

Zeigen Sie, dass dieser maximale Flächeninhalt nicht von t abhängt.

Es genügt auch hier, die Situation für $t > 0$ zu untersuchen.

Eine kleine Skizze veranschaulicht die Situation.

Volumen des Rechtecks:

$$V(t,x) = x \cdot w(t,x) = \frac{-16}{27t^2} \cdot x^2 + \frac{8}{3t} \cdot x$$

Das zugehörige Schaubild ist eine nach unten geöffnete Parabel, deren Scheitel der höchste Punkt ist.

Wir müssen also nur den Scheitel bestimmen, z. B. so:

$$\frac{-16}{27t^2} \cdot x^2 + \frac{8}{3t} \cdot x = 0 \Leftrightarrow \frac{-16}{27t^2} \cdot x \cdot \left(x - \frac{9t}{2}\right)$$

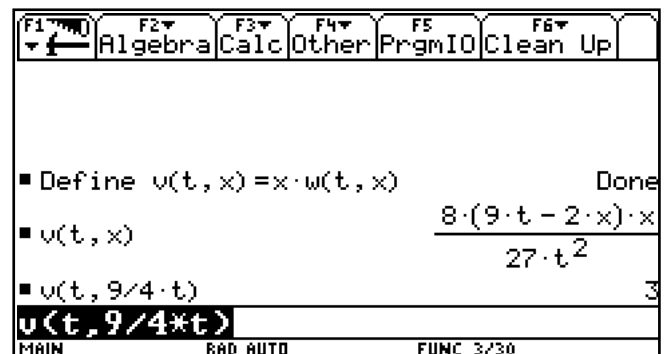
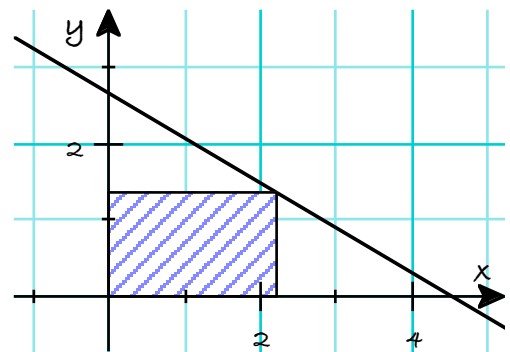
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{9t}{2}$$

Der Scheitel liegt also bei $x = \frac{9t}{4}$.

Der zugehörige Hochwert ist 3.

Das maximale Volumen ist der y -Wert des Scheitels. Daher ist $V_{\max} = 3$ und somit von t unabhängig.

Wegen der Symmetrie gilt dieses Ergebnis auch für negative Werte von t .



- d) Die Gerade h mit der Gleichung $y = a$ ($a \in \mathbb{R}$, $0 < a < \frac{2}{t}$ bzw. $\frac{2}{t} < a < 0$) schneidet die y -Achse im Punkt S und das Schaubild von $f(t,x)$ in den Punkten Q und R (mit $x_Q < x_R$).

Berechnen Sie den Wert von a in Abhängigkeit von t so, dass die Strecke SR durch Q halbiert wird.

Auch hier gilt wieder, wegen der Symmetrie müssen wir nur den Fall $t > 0$ und $a > 0$ betrachten und können die Ergebnisse anschließend für $t < 0$ und $a < 0$ übertragen.

Wenn SR durch Q halbiert werden soll,

$$\text{dann muss gelten: } x_Q = \frac{1}{2} x_R.$$

