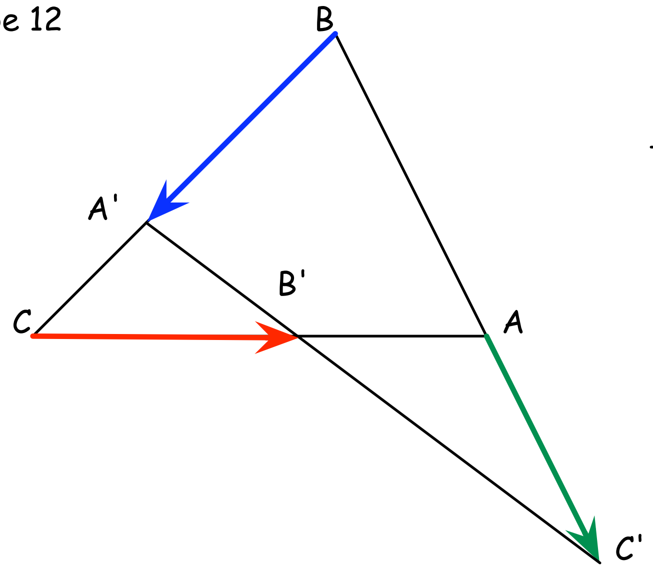
Seite 379 , Aufgabe 12

Satz des Menelaos




$\overrightarrow{AC'} = x \cdot \overrightarrow{C'B}$

$\overrightarrow{BA'} = y \cdot \overrightarrow{A'C}$

$\overrightarrow{CB'} = z \cdot \overrightarrow{B'A}$

Behauptung:

$x \cdot y \cdot z = -1$

Es ist $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow y \cdot \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{A'C} = \frac{1}{y+1} \cdot \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA'} = \frac{y}{y+1} \cdot \overrightarrow{BC}$

Analog erhält man: $\overrightarrow{B'A} = \frac{1}{z+1} \cdot \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB'} = \frac{z}{z+1} \cdot \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{x+1} \cdot \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC'} = \frac{x}{x+1} \cdot \overrightarrow{AB}$

Die Vektoren $\overrightarrow{C'B'}$ und $\overrightarrow{B'A'}$ sind linear abhängig: $\overrightarrow{C'B'} = k \cdot \overrightarrow{B'A'}$

$$\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{B'A} = \frac{-x}{x+1}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{z+1}\overrightarrow{CA} = \frac{-x}{x+1}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) - \frac{1}{z+1}\overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{-x}{x+1}\overrightarrow{CB} + \left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{z+1}\right) \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CA'} - \overrightarrow{CB'} = \frac{1}{y+1}\overrightarrow{CB} - \frac{z}{z+1}\overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-x}{x+1} = k \cdot \frac{1}{y+1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{z+1}\right) = k \cdot \left(-\frac{z}{z+1}\right)$$

Aus beiden Gleichungen k ausrechnen und gleichsetzen führt auf:

$$\frac{-x \cdot (y+1)}{x+1} = \frac{-x \cdot (z+1)}{(x+1) \cdot z} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{-x \cdot (y+1)}{x+1} = \frac{-x \cdot (z+1) + x + 1}{(x+1) \cdot z} \qquad | \cdot z \cdot (x+1)$$

$$z \cdot (-x) \cdot (y+1) = (-x) \cdot z - x + x + 1$$

$$z \cdot (-x) \cdot y - x \cdot z = -x \cdot z + 1$$

$$-x \cdot y \cdot z = +1$$

$$x \cdot y \cdot z = -1$$

q. e. d.