

# Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

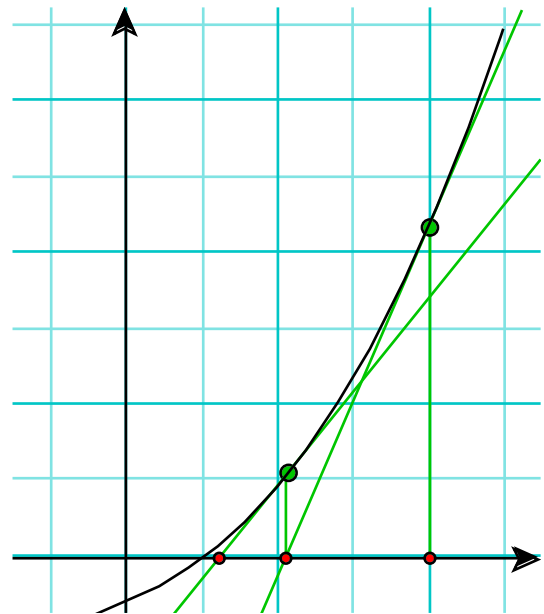
Zur Erinnerung: die Idee des Verfahrens ist es, durch fortgesetzte Tangentenbestimmung eine vorhandene Nullstelle der Funktion anzunähern.

Die Schnittpunkte der Tangenten mit der x-Achse bilden eine Folge, von der wir hoffen, dass sie gegen die gesuchte Nullstelle konvergiert.

Im nebenstehenden Bild sind die beiden ersten Schritte des Verfahrens dargestellt.

Die rechnerische Durchführung führt auf die Rekursionsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



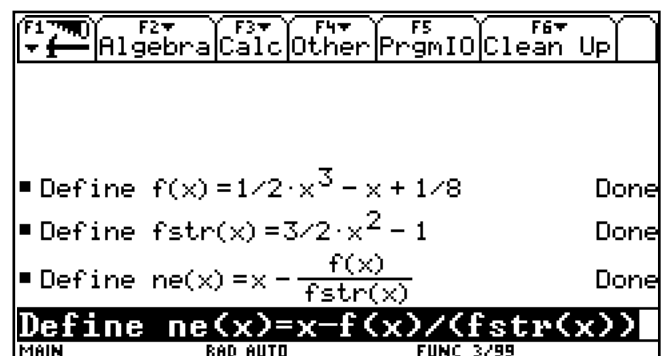
Mit dem TI 92plus lässt sich das Verfahren leicht durchführen:

Wir definieren die Funktionen wie im nebenstehenden Fenster für

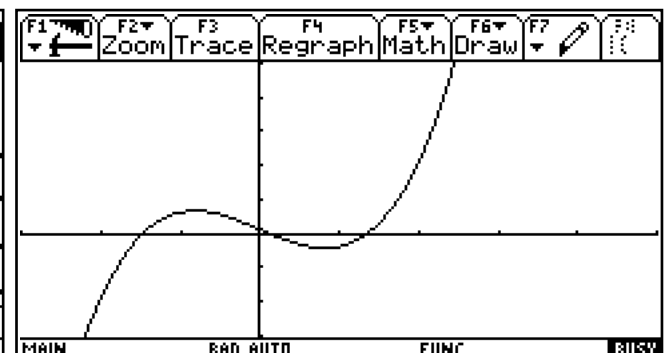
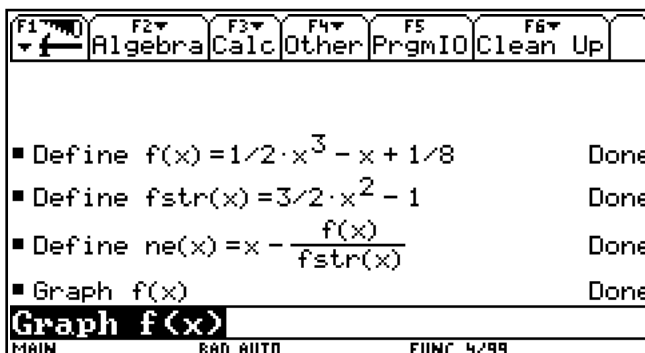
$$f: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - x + \frac{1}{8}$$

dargestellt.

Die Rekursionsformel wird dabei durch die Funktion `ne` repräsentiert.



Zunächst lassen wir uns ein Schaubild der Funktion darstellen:



Die Funktion hat offenbar drei Nullstellen, zwei im positiven, eine im negativen x-Bereich.

# Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Wir wählen jetzt einen *geeigneten Startwert* um die am weitesten rechts gelegene Nullstelle zu finden, z. B.  $x_0 = 2$ . und berechnen den Wert  $ne(2)$ .

Achtung:  
für dezimale Ergebnisse unbedingt *Diamond Enter* drücken.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
■	Define	$f(x) = 1/2 \cdot x^3 - x + 1/8$		Done	
■	Define	$fstr(x) = 3/2 \cdot x^2 - 1$		Done	
■	Define	$ne(x) = x - \frac{f(x)}{fstr(x)}$		Done	
■	Graph	$f(x)$		Done	
■		$ne(2)$			1.575
<b>ne(2)</b>					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 5/99	

Um den berechneten Wert als neuen x-Wert verwenden zu können, ersetzen wir das Funktionsargument durch  $ans(1)$ .  
Zur Erinnerung: dieser Befehl bewirkt, dass der letzte berechnete Wert in die Funktion eingesetzt wird.

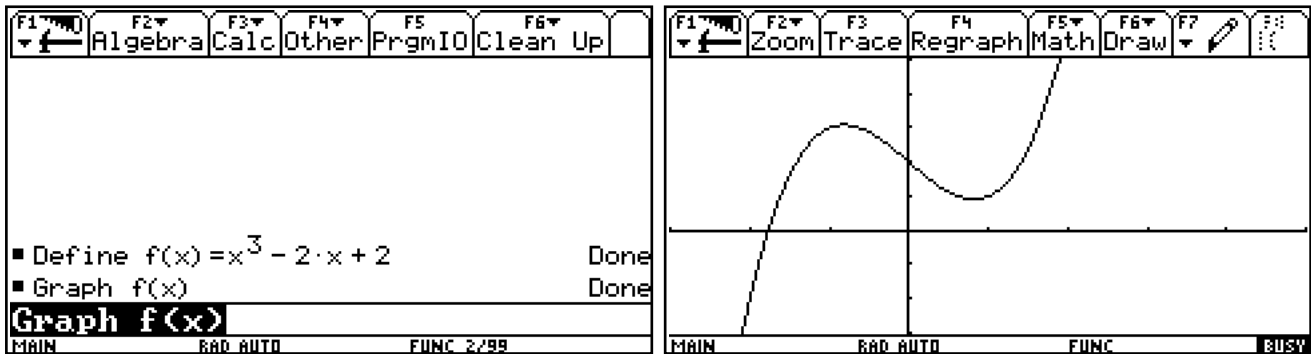
F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
■	Define	$f(x) = 1/2 \cdot x^3 - x + 1/8$		Done	
■	Define	$fstr(x) = 3/2 \cdot x^2 - 1$		Done	
■	Define	$ne(x) = x - \frac{f(x)}{fstr(x)}$		Done	
■	Graph	$f(x)$		Done	
■		$ne(2)$			1.575
<b>ne(ans(1))</b>					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 5/99	

Ab jetzt können wir durch fortgesetztes Drücken der *Enter-Taste* einen Näherungswert nach dem anderen berechnen.

Nach wenigen Schritten bleibt die Anzeige stabil, wir haben also einen Näherungswert mit Rechnergenauigkeit gefunden.

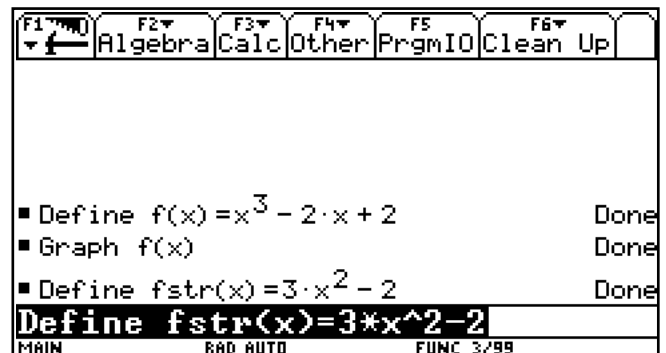
F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up
■	Graph	$f(x)$		Done	
■		$ne(2)$			1.575
■		$ne(1.575)$			1.38995635695
■		$ne(1.3899563569542)$			1.34900378955
■		$ne(1.3490037895459)$			1.34700211549
■		$ne(1.3470021154917)$			1.34699740855
■		$ne(1.3469974085538)$			1.34699740853
■		$ne(1.3469974085277)$			1.34699740853
<b>ne(ans(1))</b>					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 11/99	

# Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung



Einige Beispiele für Probleme, die auftreten können:  $f: x \mapsto x^3 - 2x + 2$   
 Die Funktion hat offensichtlich in der Nähe von  $x = -2$  eine Nullstelle.

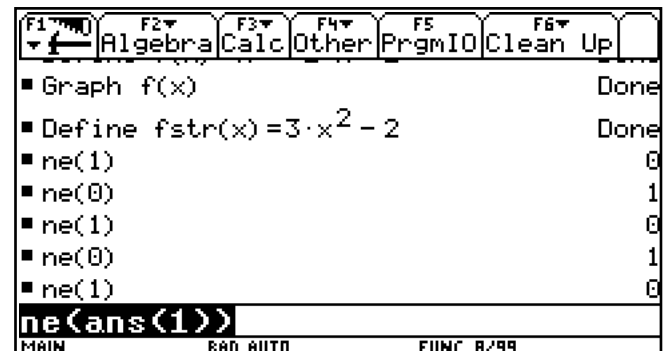
Bevor wir unsere bereits definierte Funktion **ne** anwenden können, müssen wir noch die Ableitung **fstr** für unsere neue Funktion definieren.



Wählen wir dann als Startwert  $x = 1$ , so passiert folgendes:

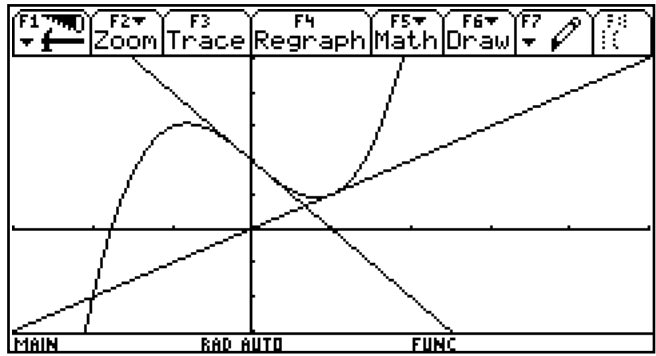
Wir erhalten abwechselnd die „Näherungswerte“ 0 und 1.

Unsere Tangenten „schwingen“ um den Tiefpunkt des Schaubilds herum...

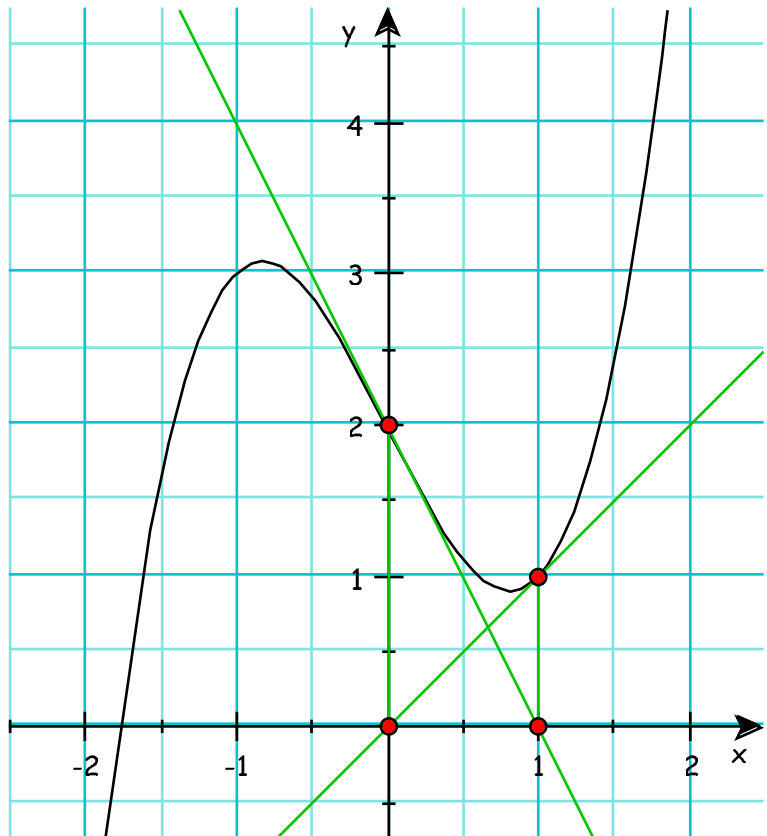


# Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Am Schaubild stellt sich das so dar:



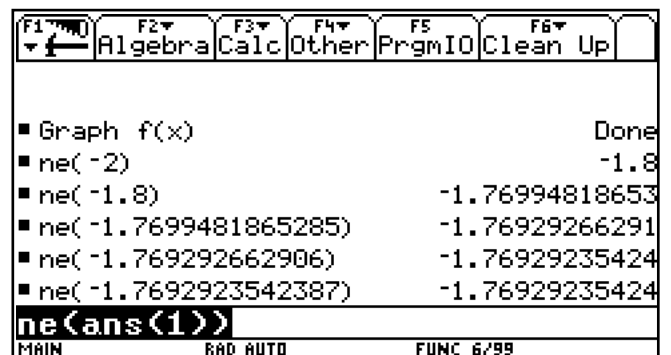
Wer es lieber farbiger möchte:



Übrigens:

mit dem Startwert  $x_0 = -2$  erhalten wir schnell einen guten Näherungswert:

$$x \approx -1,769$$



# Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Wir nehmen uns nochmal die Funktion  $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - x + \frac{1}{8}$  des ersten Beispiels vor. Wie auf Seite 1 nachzulesen, hat diese Funktion offenbar drei Nullstellen, alle zwischen  $x = -2$  und  $x = +2$  gelegen.

Mit dem Startwert  $x_0 = 2$  haben wir die am weitesten rechts gelegene Nullstelle näherungsweise gefunden.

Führen Sie das Verfahren mit den Startwerten  $x_0 = -0,5867$  [ $x_0 = -0,5868$  ;  $x_0 = -0,5869$ ] durch und beschreiben Sie, was da passiert...

Das Newton-Verfahren hält viele Überraschungen für uns bereit. Im Großen und Ganzen liefert es jedoch recht schnell sehr gute Näherungswerte für Nullstellen. Vor der Anwendung des Verfahrens sollten wir auf jeden Fall die ungefähre Lage der gesuchten Nullstelle bestimmen und dann den Startwert *nahe bei* dem vermuteten Wert wählen. Bei der praktischen Durchführung sollten wir dann genau beobachten, was passiert und gegebenenfalls einen neuen, vielleicht nur geringfügig anderen Startwert wählen. Wenn alles nichts hilft, muss man eben ein anderes Verfahren anwenden...